Построение плоских областей в среде динамической математики при решении задач с параметрами

Construction of Flat Domains in the Environment of Dynamic Mathematics When Solving Problems with Parameters

Получено 28.06.2021 Одобрено 20.07.2021 Опубликовано 25.08.2021 УДК 372.851 DOI: 10.12737/1998-0744-2021-9-4-10-24

ВАСИЛЬЕВА М.В.,

канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры общеобразовательных дисциплин ГБОУ ВО МО «Академия социального управления», г. Москва

e-mail: ipk1@yandex.ru

КАШИЦЫНА Ю.Н.,

канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры общеобразовательных дисциплин ГБОУ ВО МО «Академия социального управления», г. Москва

e-mail: kaschitsyna2010@yandex.ru

VASILEVA M.V.,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of General Education Disciplines, Academy of Public Administration, Moscow

e-mail: ipk1@yandex.ru

KASHITSYNA YU.N.,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of General Education Disciplines, Academy of Public Administration, Moscow

e-mail: kaschitsyna2010@yandex.ru

Аннотация

Статья основывается на основных ключевых идеях концепции профильного обучения и эксперимента по внедрению цифровой образовательной среды, одной из них является идея применения цифровых образовательных контентов, в том числе в математическом образовании, как основы для опережения на мировом уровне. Статья знакомит учителей математики с возможностями использования динамических чертежей для визуализации математических объектов при решении задач с параметрами. Использование мультимедийных технологий с элементами интерактивного взаимодействия с пользователем позволит реализовать развивающийся потенциал основного и среднего общего образования, что является приоритетным направлением образовательных стандартов.

Ключевые слова: профильное обучение, задачи с параметрами, динамическая математика, плоская область, цифровая образовательная среда.

Abstract

The article is based on the main key ideas of the concept of profile education and the experiment on the implementation of a digital educational environment, one of them is the idea of using digital educational content, including in mathematical education, as a basis for getting ahead at the world level. The article acquaints teachers of mathematics with the possibilities of using dynamic drawings to visualize mathematical objects when solving problems with parameters. The use of multimedia technologies with elements of interactive interaction with the user will make it possible to realize the developmental potential of basic general secondary education, which is a priority area of educational standards.

Keywords: specialized training, tasks with parameters, dynamic mathematics, flat area, digital educational environment.

На данный момент актуальной становится задача внедрения на уровнях основного общего и среднего общего образования новых методов обучения, образовательных технологий, обеспечивающих освоение обучающимися базовых навыков и умений, повышение мотивации к обучению и вовлеченности в образовательный процесс.

Основная задача создания системы профильной подготовки в старших классах общеобразовательной школы — «*ориентация на индивидуализацию обучения и социализацию обучающихся, в том числе, с учетом реальных потребностей рынка труда,…кооперации старшей ступени школы с учреждениями начального, среднего и высшего профессионального образования*» [6]

Согласно Концепции профильного обучения, система профильного обучения включает базовые общеобразовательные и профильные учебные предметы, а также элективные курсы.

В положении о проведении на территории отдельных субъектов Российской Федерации эксперимента по внедрению цифровой образовательной среды постановления Правительства Российской Федерации от 7 декабря 2020 г. № 2040 [5], в частности, определены понятия:

- «*образовательные сервисы*» — цифровые решения, предоставляющие возможность приобретения знаний, умений и навыков, в том числе дистанционно, и обеспечивающие автоматизацию образовательной деятельности в сфере начального общего, основного общего, среднего общего образования, разрабатываемые и (или) предоставляемые поставщиками контента и образовательных сервисов в рамках реализации цифровой образовательной среды [5];
- «*цифровой образовательный контент*» — материалы и средства обучения и воспитания, представленные в цифровом виде [5];
- «*цифровая образовательная среда*» — совокупность условий для реализации образовательных программ начального общего, основного общего и среднего общего образования с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий с учетом функционирования электронной информационно-образовательной среды, включающей в себя электронные информационные и образовательные ресурсы и сервисы, цифровой образовательный контент, информационные и телекоммуникационные технологии, технологические средства, обеспечивающие освоение учащимися образовательных программ в полном объеме независимо от места их проживания [5].

В профильном обучении математики «образовательными сервисами» и «цифровыми образовательными контентами» могут являться различные интерактивные программы, такие как «Живая математика», «Geogebra», «1С: Математический конструктор». Данные интерактивные программы являются электронными образовательными сервисами «цифровой образовательной среды» и могут быть использованы при дистанционном и электронном обучении.

Рассмотрим использование программы «1С: Математический конструктор» в качестве «образовательного сервиса».

«1С: Математический конструктор» — программная среда динамической математики. Прежде, чем говорить конкретно об этой среде, кратко расскажем о программах динамической математики.

В своем изначальном виде эти программы предоставляют пользователю набор виртуальных инструментов, с помощью которых на экране, как на листе бумаги, можно выполнять построения.

Работа в виртуальной математической лаборатории программы «1С: Математический конструктор» обеспечивает поддержку работы проектного типа, подразумевающего почти незаметный и плавный переход от несложных опытов и простых заданий к углубленному изучению явления, вызвавшего интерес.

Программа дает хорошие возможности при построении графиков функций, плоских областей для последующего их использования решении различных задач, в том числе с параметрами.

Рассмотрим применение программы «1С: Математический конструктор» для графического решения задач с параметрами, в котором используются так называемые «плоские области» и их пересечения.

Напомним, что: «Пересечением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и множеству B одновременно. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$». [12]

В работе с программой мы будем использовать следующие инструменты (табл. 1).

Задача 1.

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x \le a \\ 2x - x^2 \ge a - 1. \end{cases}$$

Для иллюстрации решения данной системы, сделаем небольшие преобразования: заменим параметр *a* переменной *y* и во втором неравенстве перенесем — 1 из правой части в левую. Получаем следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x \le y \\ -x^2 + 2x + 1 \ge y \end{cases}, \quad y = a$$

Графически множество точек *(x; y)* удовлетворяющие неравенству с двумя переменными *x* и *y* — это плоская область, лежащая над или под графиком, который является границей области. В данном случае для неравенства $x^2 + x \le y$ границей области будет являться график $x^2 + x = y$, а плоская область — это все точки, лежащие над графиком. Аналогично

Таблица 1

Инструменты программы «1С: Математический конструктор»

Иконка	Название инструмента/команды	Курсоры
$f(x)$	Функция одной переменной	
$a=$	Параметр	
	График	
	Область над/под графиком	
	Пересечение	
	Скрыть/показать	

для неравенства $-x^2 + 2x + 1 \geq y$, только плоская область — это все точки, лежащие под графиком $-x^2 + 2x + 1 = y$. При построении графиков функций как границ областей учтем, что оба неравенства в системе «нестрогие» — это означает, что множество точек *(x; y)* принадлежащих границе области (графику) удовлетворяют неравенствам, поэтому линия графика будет сплошной.

Система данных неравенств — это пересечение двух плоских областей. Проиллюстрируем это в программе «1С: Математический конструктор».

Сначала построим графики функций

$x^2 + x = y$, $-x^2 + 2x + 1 = y$

Нажмем кнопку $f(x)$ на панели и щелкнем на листе там, где будет располагаться функция. На листе появится поле объекта «Функция» с записью $f(x) = x$ (в дальнейшем при задании новых функций обозначение «*f*» будет меняться в алфавитном порядке, а правая часть – *x* — всегда одинакова). Одновременно откроется окно свойств этого объекта на вкладке *Функция* с редактором выражений, в котором, для заполнения пустого места, стоит буква *x*, с помощью клавиатуры следует записать функцию и нажать кнопку «ОК» (рис. 1) после чего на листе появится запись функции.

Для построения графика функции надо использовать инструмент . Строка состояния и вид курсора подскажут, что теперь нужно указать функцию. Щелкнем по нашей функции — на экране возникнет фрейм с ее графиком. Кроме того, рядом с формулой функции появится линия того же цвета, что и график (рис. 2).

Теперь можно придать графику нужный цвет и толщину — это делается так же, как и для любых других линий, а фрейму — желаемые положение, форму и размер. Для этого помещаем мышь на край фрейма так, чтобы рамка подсветилась. Если при этом курсор находится в углах или серединах сторон рамки (принимая форму двойной стрелки), то, удерживая нажатой левую кнопку мыши, рамку можно растягивать в направлении этих стрелок. Если же курсор находится в других точках рамки, то он превращается в крестик и позволяет сдвигать фрейм как целое. Наконец, с помощью «руки» и «лупы» можно найти наиболее удобный масштаб и положение «холста» с графиком относительно фрейма.

Для построения плоских областей воспользуемся инструментом «Область над/под графиком», для этого необходимо выбрать инструмент, после чего навести курсор на график функции и нажать левую клавишу мыши, при этом появится область и окно свойства объекта (рис. 3), в котором надо выбрать необходимые условия заливки по оси *y* и по оси *x* (рис. 4).

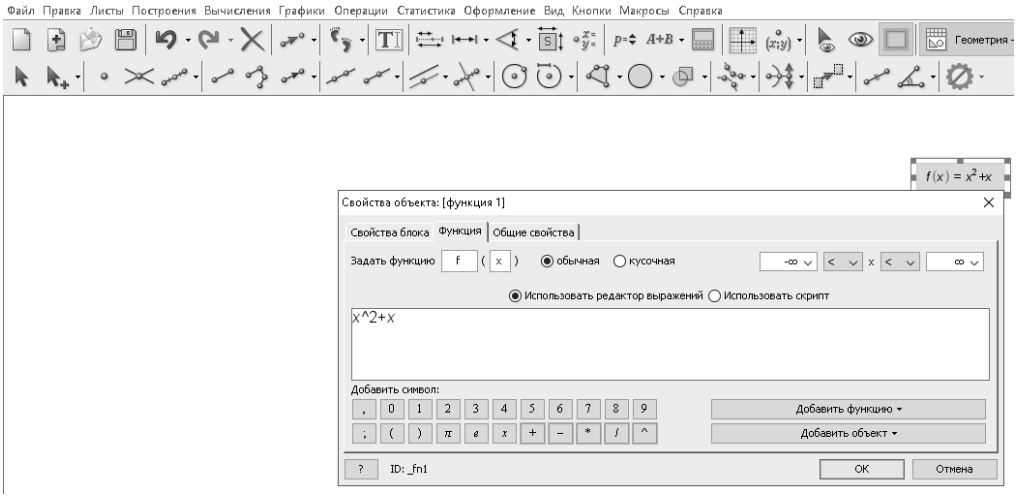

Рис. 1. Создание функции

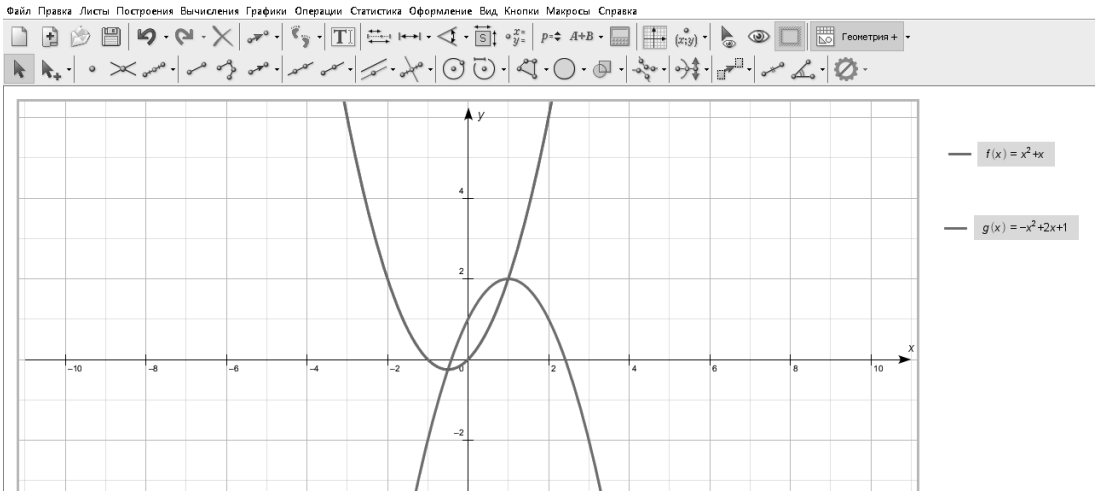

Рис. 2. Графики функций

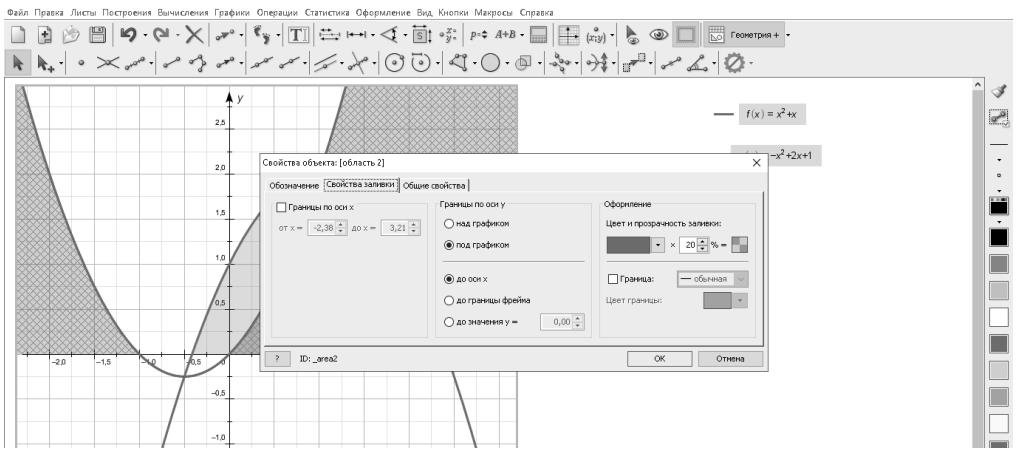

Рис. 3. Создание области

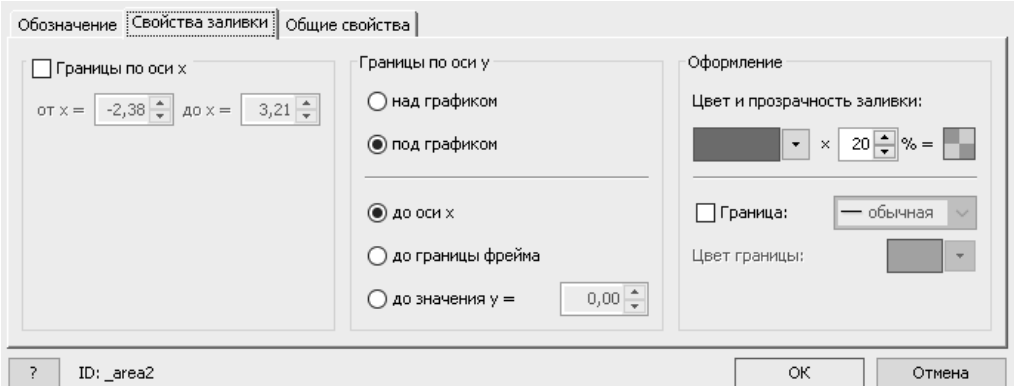

Рис. 4. Свойства области

Как отмечалось выше нас интересует плоская область над графиком $x^2 + x = y$, и область под графиком $-x^2 + 2x + 1 = y$ (рис. 5–6).

Для того чтобы построить пересечение областей воспользуемся инструментом «Пересечение» (рис. 7). Выбрав данный инструмент необходимо навести курсор на одну область, нажать левую клавишу мыши, затем тоже самое для другой области, после чего нажать на клавиатуре клавишу «Ввод».

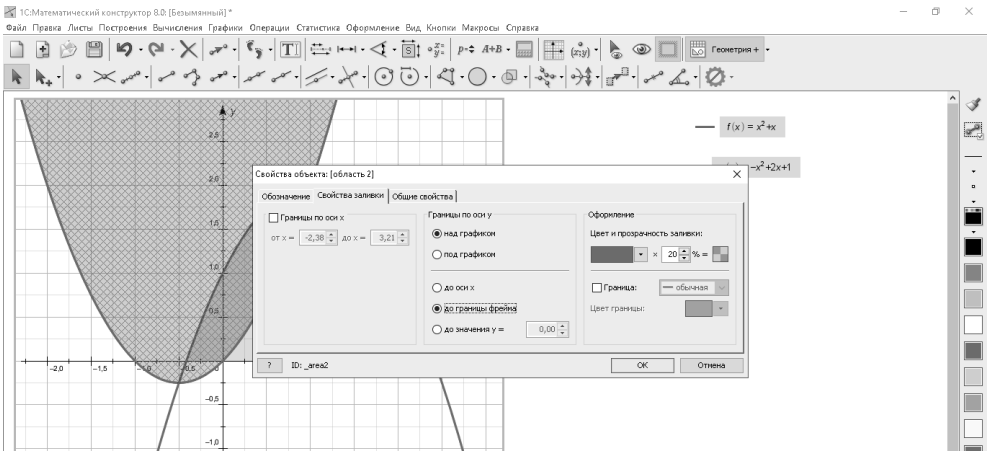

Рис. 5. Создание области

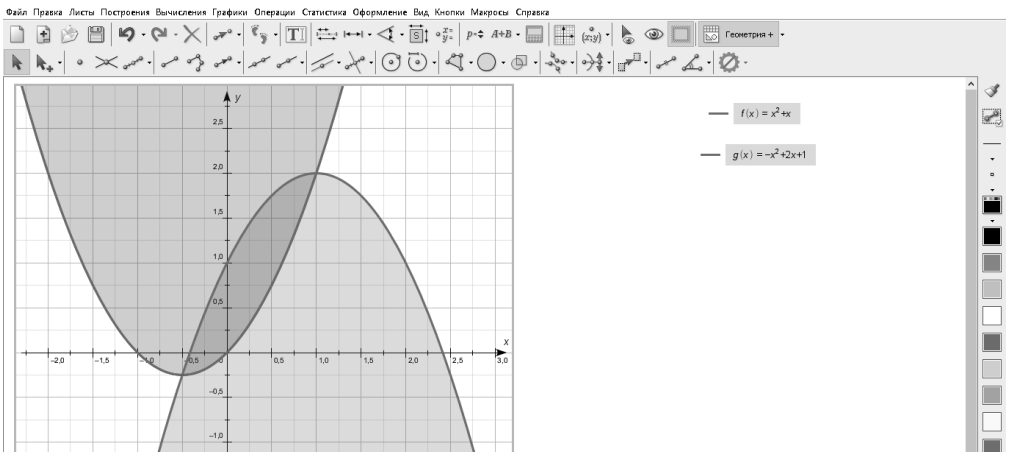

Рис. 6. Плоские области

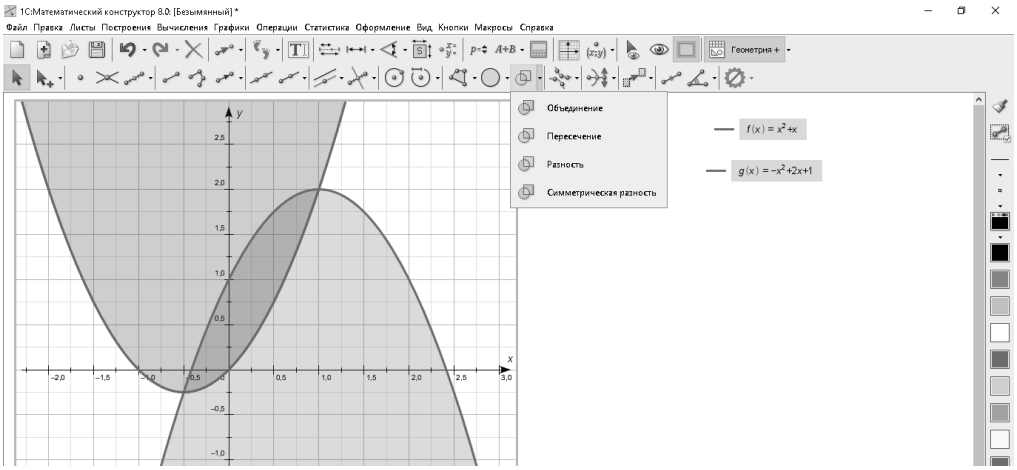

Рис. 7. Инструмент «Пересечение»

Далее необходимо выбрать инструмент «Скрыть/показать», навести курсор на одну и другую из первоначальных областей и «щелкнуть» с помощью левой клавиши мыши. В результате первоначально построенные области будут скрыты, и останется на чертеже только пересечение двух областей (рис. 8).

Для создания параметра a и построения функции y=a понадобится инструмент «*Параметр*». Нажмем кнопку на панели (рис. 9) и «щелкнем» на листе там, где будет располагаться параметр. Целесообразно его отредактировать: в диалоге свойств установить границы изменения от –1 до 3, например, (большие значения в данной модели не нужны) можно использовать и сопровождающий параметр горизонтальный ползунок (рис. 10).

После введения параметра построим график функции *y=a,* с помощью ползунка можно менять значения параметра при этом прямая, иллюстрирующая параметр меняет свое положение (рис. 11–13).

Вернемся к условию задачи:

Решите систему неравенств .

$$\begin{cases} x^2 + x \le a \\ 2x - x^2 \ge a - 1. \end{cases}$$

Анализируя полученную модель, можно сделать вывод, что решения системы будут

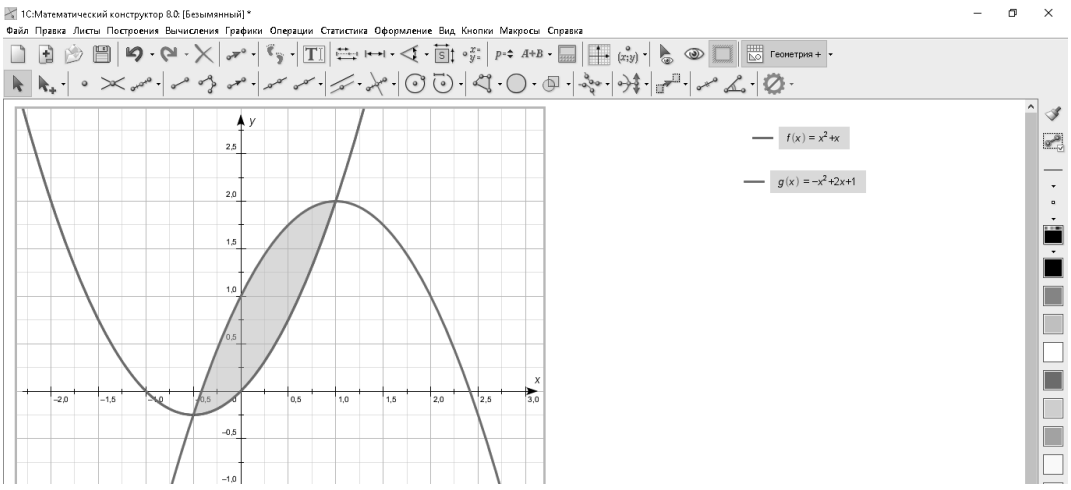

Рис. 8. Пересечение плоских областей

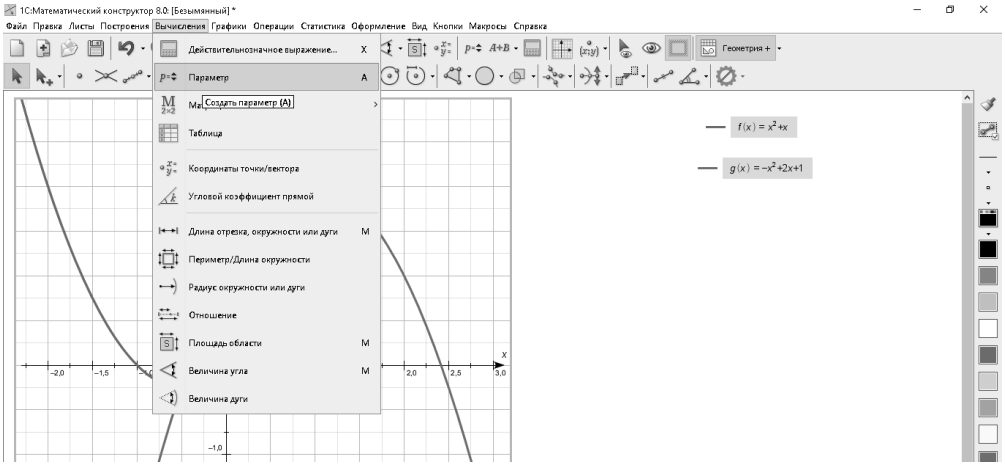

Рис. 9. Инструмент «Параметр»

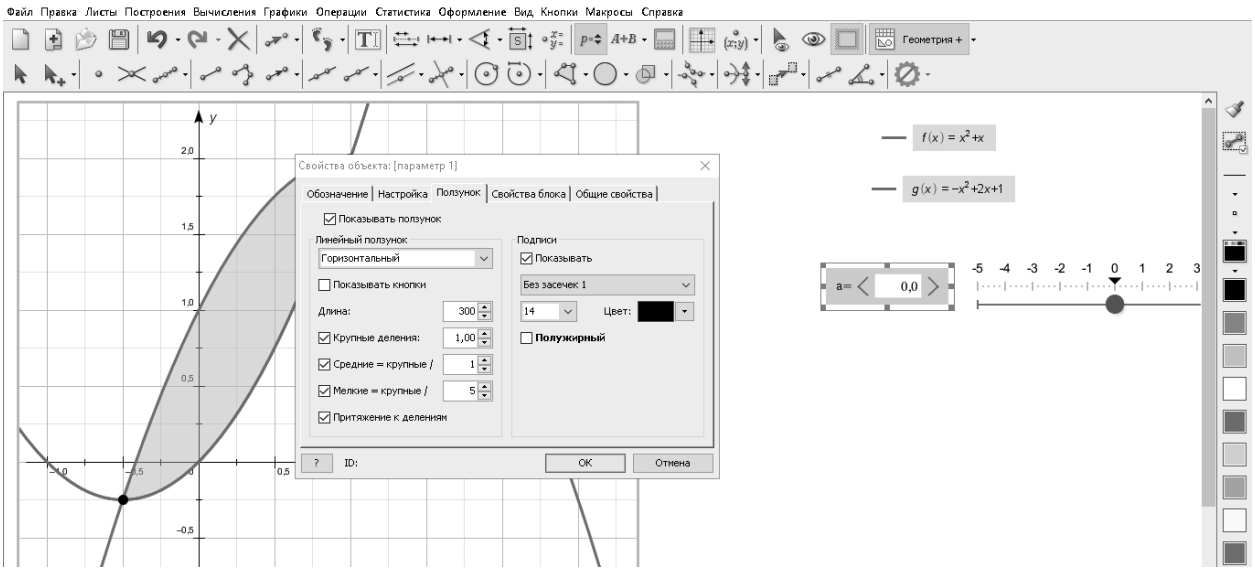

Рис. 10. Создание параметра a

при $a \in \left[-\frac{1}{4};2\right]$, при остальных значениях a решений нет.

Теперь о решении. Заметим, что решения — это все те значения прямой $y = a$, которые попадают в область, все эти значения находятся от левой точки пересечения прямой y=a с графиком функции $-x^2 + 2x + 1 = y$ до правой точки пересечения прямой $y = a$ с графиком функции $x^2 + x = y$ (рис. 11), т.е. необходимо решить уравнения: $x^2 + x - a$ и $-x^2 + 2x + 1 - a$ получаем решения:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \text{ и } x_{1,2}, \text{ соответственно.}$$

Ответ: при $a \in (-\infty;-\frac{1}{4}) \cup (2;+\infty)$ решений нет;

при $a \in \left[-\frac{1}{4};2\right]$

$$x \in \left[1-\sqrt{2-a};\frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}\right].$$

Задача 2.

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 0 \\ \sqrt{a-x} < 4-x \end{cases} \quad (1)$$

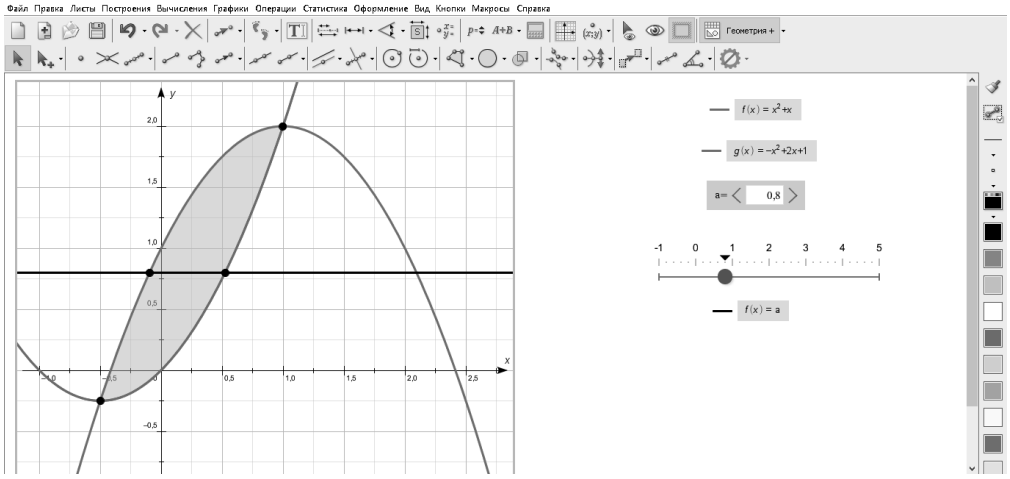

Рис. 11. Иллюстрация множества решений при a=0.8

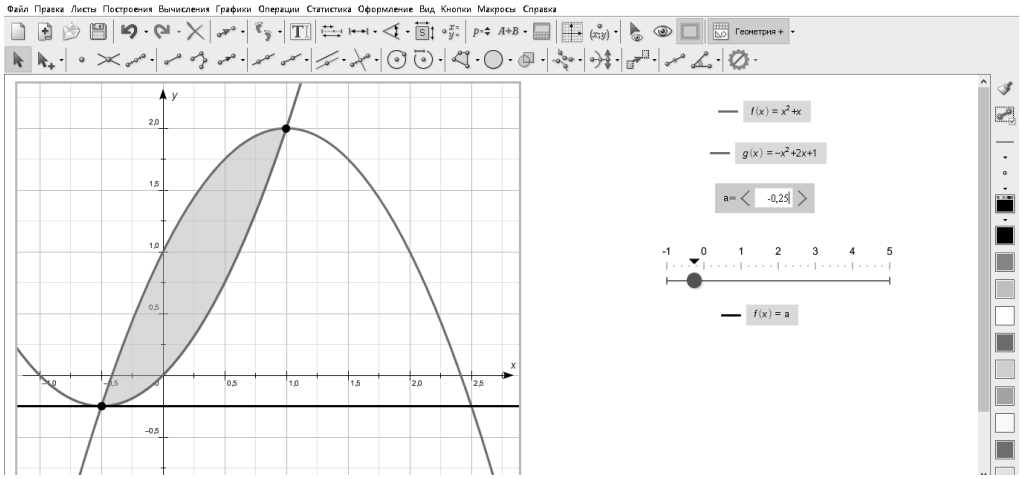

Рис. 12. Иллюстрация множества решений при a=–0.25

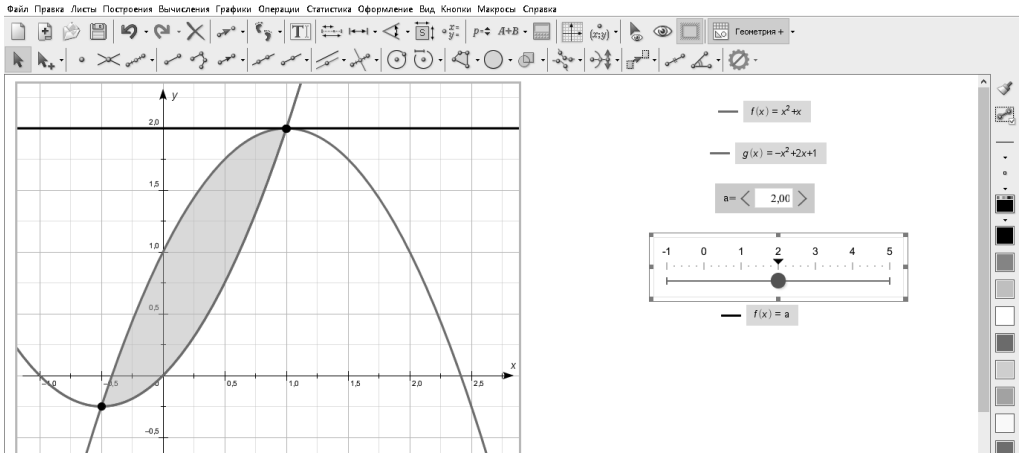

Рис. 13. Иллюстрация множества решений при a=2

Данная система равносильна следующей

$$\begin{cases} ax \geq 0 \\ a - x \geq 0 \\ x < 4 \\ a - x < x^2 - 8x + 16 \end{cases} \qquad (2)$$

Также, как и в задаче 1, во всех неравенствах данной задачи заменим параметр a на переменную y.

$$\begin{cases} yx \geq 0 \\ y - x \geq 0 \\ x < 4 \\ y - x < x^2 - 8x + 16 \end{cases}, \quad y = a \qquad (3)$$

Закрашенная область на рисунке 14 иллюстрирует множество точек *(x, y)* удовлетворяющих системе (3). Обратим внимание на то, что неравенство $y - x < x^2 - 8x + 16$ строгое, поэтому граница области $y - x = x^2 - 8x + 16$ — пунктирная линия — иллюстрирует, что точки, принадлежащие данной границе не являются решениями системы неравенства.

Введем параметр a и построим график функции $y=a$. Часть прямой $y=a$, которая попадает в плоскую область, иллюстрирует множество решений системы неравенств (рис. 15). Исходя из полученной модели, можно сделать вывод о том, что решения системы неравенств будут при $a \in (\infty; 16)$.

Множество решений неравенства при $a \in (-\infty; 0]$ вполне очевидно определить исходя из модели, иллюстрирующей плоскую область: $x \in (-\infty; a]$.

В данной задаче необходимо внимательно проанализировать полученную плоскую область там, где парабола касается прямой. Для этого можно увеличить масштаб фрейма по-

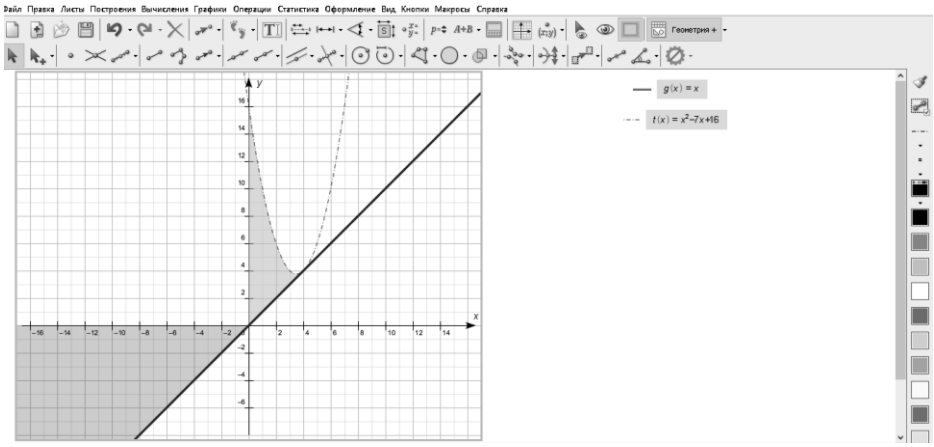

Рис. 14. Плоская область

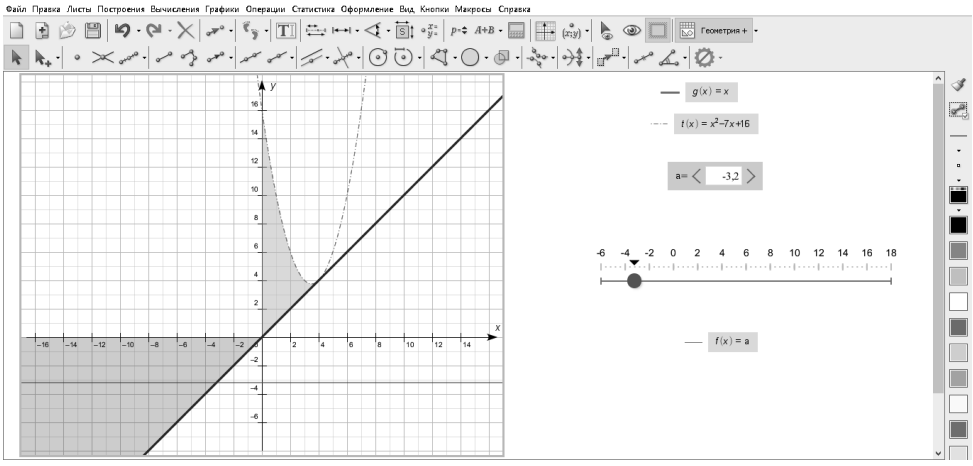

Рис. 15. Иллюстрация множества решений при a=-3.2

тянув курсором единичный отрезок системы координат (рис. 16).

Подробно рассмотрим область $a \in ({}^{15}/_{4}; 4)$ (рис. 16–18). При данных значениях параметра плоская область состоит из двух частей: $x \in [0; x_1)$ и $x \in (x_2; a]$, где x_1 — описывает левую ветвь параболы, x_2 — правую.

x_1 и x_2 решения уравнения: $a - x = x^2 - 8x + 16$

$$x_1 = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{4a - 15}); \quad x_2 = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{4a - 15}).$$

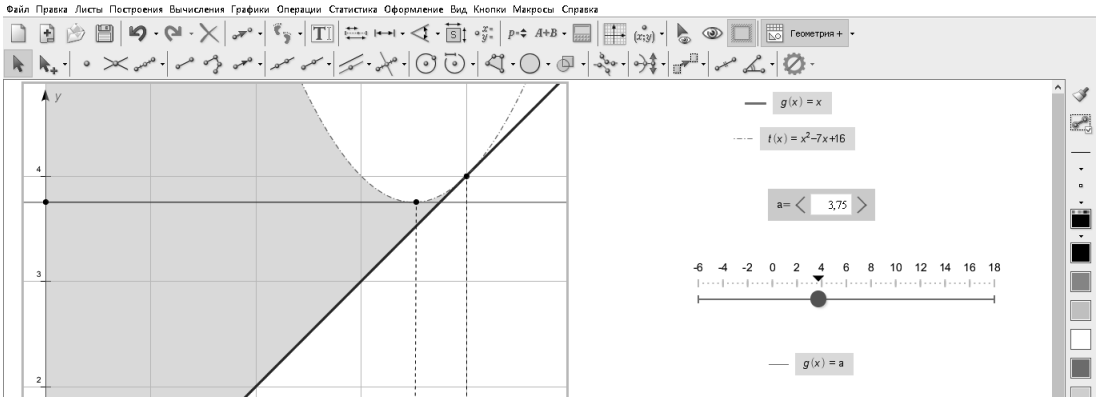

Рис. 16. Иллюстрация множества решений при a=3.75

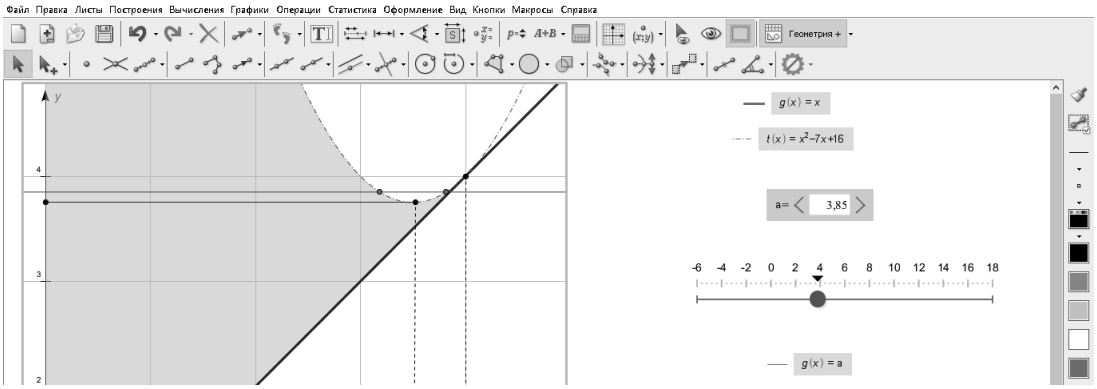

Рис. 17. Иллюстрация множества решений при a=3.85

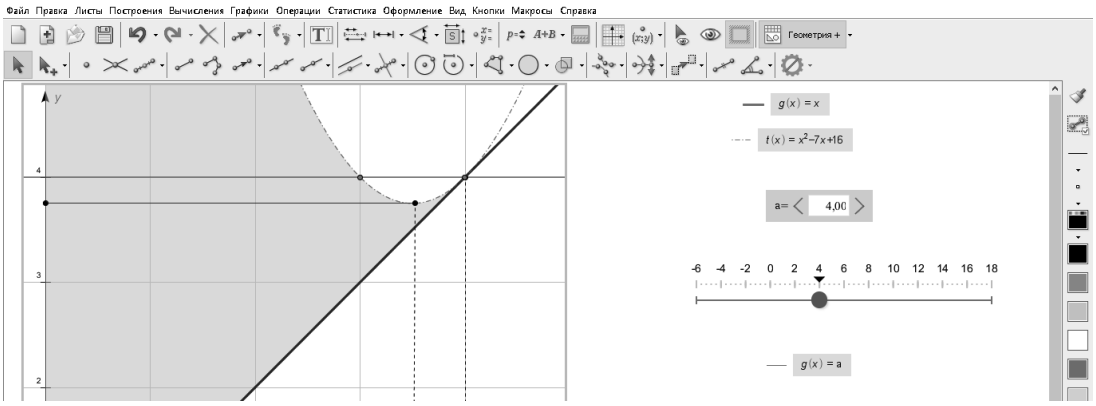

Рис. 18. Иллюстрация множества решений при a=4

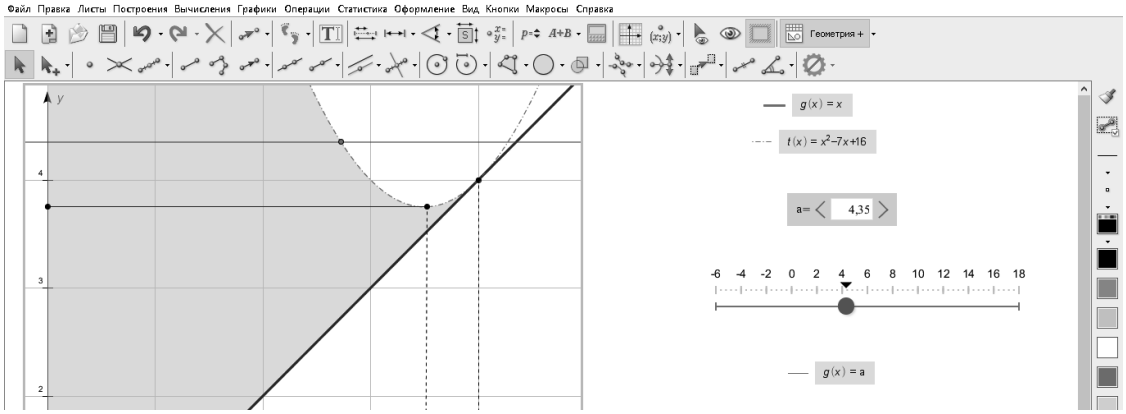

Рис. 19. Иллюстрация множества решений при a=4.35

Следующая часть области $a \in [4;16)$: $x \in [0; x_1)$ (рис. 19).

Ответ:

$a \in (-\infty; 0]$, $x \in (-\infty; a]$,

$a \in \left(0; \frac{15}{4}\right]$, $x \in [0; a]$,

$a \in \left(\frac{15}{4}; 4\right)$, $x \in [0; x_1) \cup x \in (x_2; a]$,

$x_1 = \frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{4a-15}\right)$; $x_2 = \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{4a-15}\right)$

$a \in [4; 16)$, $x \in [0; x_1)$,

$a \in [16; +\infty)$, решений нет.

Задача 3

При каких значениях параметра система

$$\begin{cases} a\left(x^2+2x\right) = y+1 \\ \left(y+x\right)\left(y+x-2\right) \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение задачи 3 целесообразно начать с неравенства, а именно построить множество точек *(x, y)*, удовлетворяющих неравенству $(y+x)(y+x-2) \le 0$ (рис. 20–21). Далее необходимо задать параметр и построить $a(x^2 + 2x) = y + 1$ — семейство парабол, проходящих через точку с координатами (0; –1) (рис. 22).

После построений исследуем полученную модель в соответствии с условием задачи, изменяя параметр (рис. 23–25). В результате исследований очевидно, что единственное решение задачи будет только в том случае, когда парабола $a(x^2 + 2x) = y + 1$ касается прямой $(y + x) = 0$, во всех остальных случаях либо множество решений, либо решений нет.

Таким образом, задача сводится к следующей:

«При каких значениях параметра *a* система

$$\begin{cases} a(x^2+2x = y+1 \\ (y+x) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?» Для решения данной задачи необходимо потребовать, чтобы дискриминант (***D***) уравнения, полученного из системы, был равен нулю:

$$\begin{cases} a(x^2+2x = y+1 \\ (y+x) = 0 \end{cases}, \quad D = 0$$

Ответ:

$$a = \left\{-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}.$$

Предметные результаты изучения математики и информатики включают формирование информационной и алгоритмической культуры; развитие основных навыков и умений использования компьютерных устройств; формирование навыков и умений безопасного и целесообразного поведения при работе с компьютерными программами.

Работа в виртуальной математической лаборатории обеспечивает поддержку работы проектного типа, подразумевающего почти незаметный и плавный переход от несложных опытов и простых заданий к углубленному изучению явления, вызвавшего интерес. Кро-

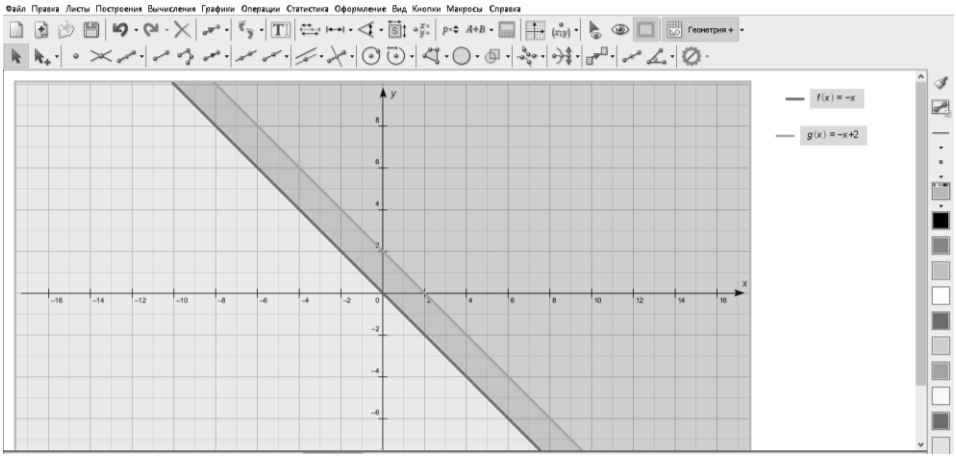

Рис. 20. Плоские области

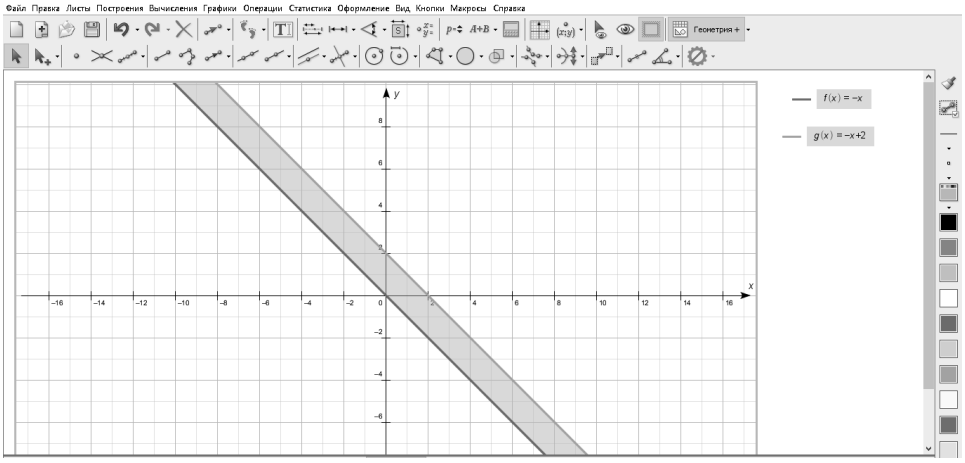

Рис. 21. Область

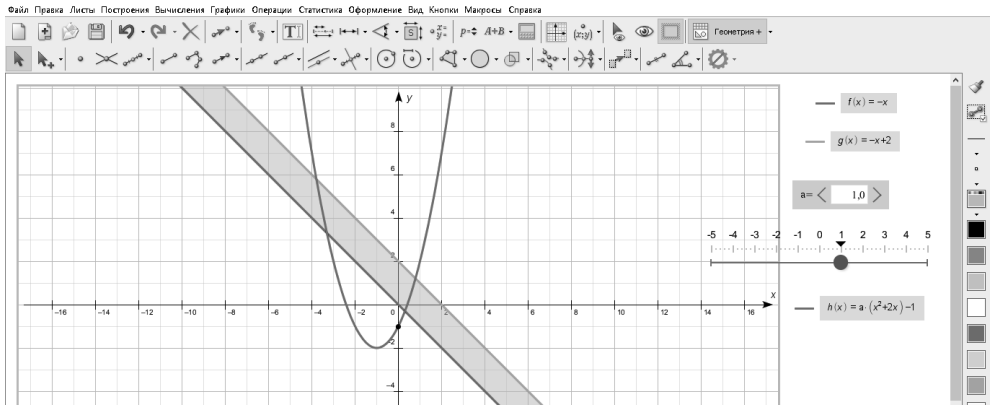

Рис. 22. Иллюстрация множества решений при a=1

ме того, программная среда поддерживает и традиционную «задачную» форму. Особенно удачно реализуется в ней широкий спектр задач на построение.

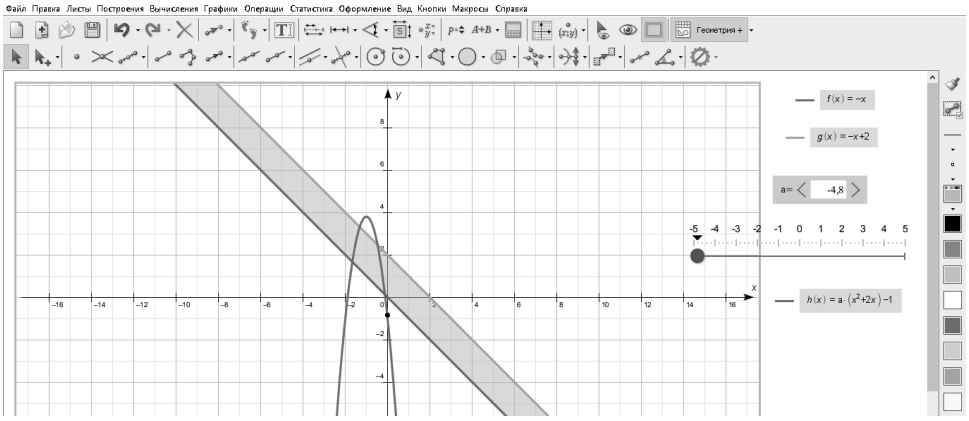

Рис. 23. Иллюстрация множества решений при a=–4.8

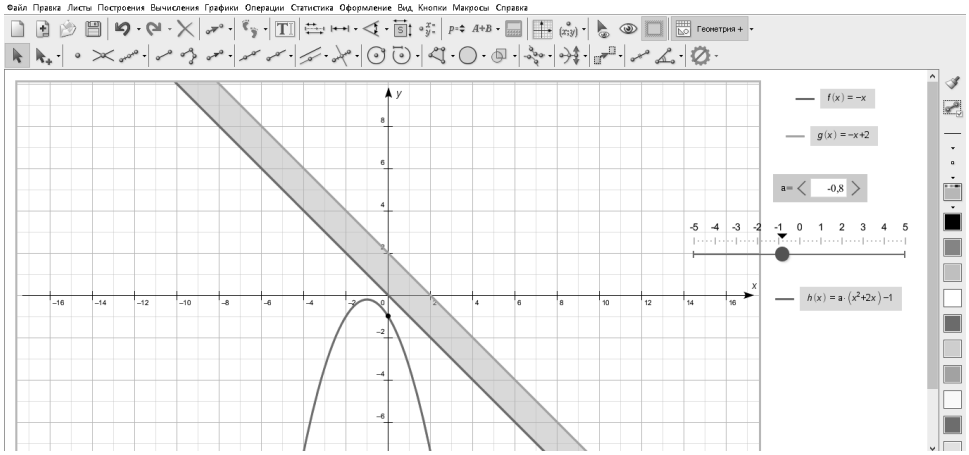

Рис. 24. Иллюстрация множества решений при a=–0.8

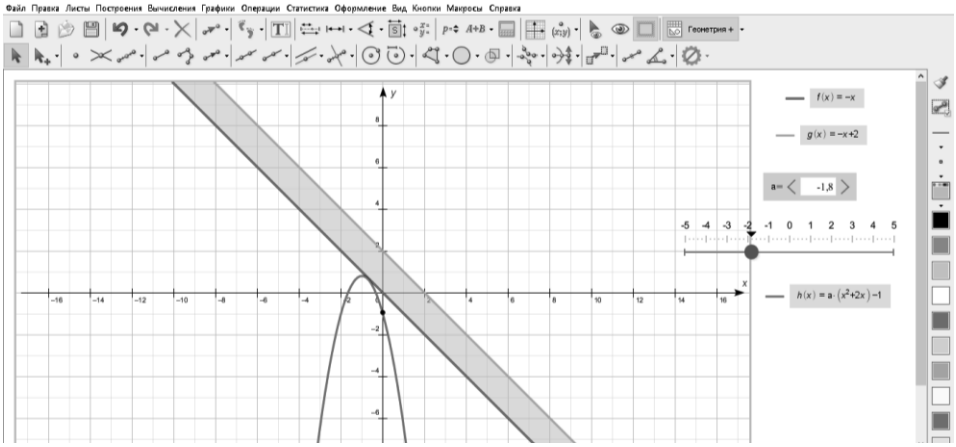

Рис. 25. Иллюстрация множества решений при a=-1.8

Подобные динамические среды могут быть использованы, как в урочной, так и во внеурочной деятельности, в качестве демонстрационного материала учителем и в качестве инструмента для исследований обучающимся.

Очевидно, что использование различных способов решения задач, в том числе нестандартных играет важную роль в формировании логического мышления и математической культуры обучающихся.

Надо отметить, что разнообразие задач с параметрами и использование различных приемов для их решения позволит школьникам научиться применять свои знания в нестандартных ситуациях.

Использование программ динамической математики позволяет развить у обучающихся навыки восприятия математических объектов (фигур, связанных с ними величин, формулировок утверждений и вопросов, доказательств и т.п.) и проведения различных активных действий (измерений, сравнений, построений, наблюдений, формирования предположений, их подтверждений и опровержений и т.п.).

Список литературы

1. *Амелькин В.В., Рабцевич В.Л.* Задачи с параметрами: Справ. Пособие по математике. — Мн.: «Асар», 1996.
2. *Васильева, М.В.* Решение задач с параметрами с использованием возможностей программы «Живая математика» Сборник научных трудов: Конференциум АСОУ: сборник научных трудов и материалов научно-практических конференций / Науч. ред. Л.Н. Горбунова. — М.: АСОУ, 2015. – №1. – С. 2340–2348.
3. *Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.* Задачи с параметрами. Издание второе, дополненное и переработанное. — Киев: «Евроиндекс», 1995.
4. *Моденов В.П.* Математика для школьников и абитуриентов. — М.: Институт компьютерных исследований; Наука, Физматгиз, 2002.
5. О проведении эксперимента по внедрению цифровой образовательной среды Постановление Правительства Российской Федерации от 07.12.2020 г. № 2040 [электронный ресурс] http://government.ru/docs/all/131381/ (дата обращения 25.06.2021)
6. Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования Приложение к приказу Минобразования России от 18.07.2002 N 2783 КОНЦЕПЦИЯ профильного обучения на старшей ступени

References

1. Amel'kin V.V., Rabtsevich V.L. *Zadachi s parametrami* [Tasks with parameters]. Minsk, «Asar» Publ., 1996.
2. Vasil'eva, M.V. *Reshenie zadach s parametrami s ispol'zovaniem vozmozhnostey programmy «Zhivaya matematika» Sbornik nauchnykh trudov: Konferentsium ASOU* [Solving problems with parameters using the capabilities of the "Living Mathematics" program Collection of scientific papers: ASOU Conference]. Moscow, ASOU Publ., 2015, I. 1, pp. 2340-2348.
3. Gornshteyn P.I., Polonskiy V.B., Yakir M.S. *Zadachi s parametrami* [Tasks with parameters]. Kiev, «Evroindeks» Publ., 1995.
4. Modenov V.P. *Matematika dlya shkol'nikov i abiturientov* [Mathematics for schoolchildren and applicants]. Moscow, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ.; Nauka Publ., Fizmatgiz Publ., 2002.
5. *O provedenii eksperimenta po vnedreniyu tsifrovoy obrazovatel'noy sredy Postanovlenie Pravitel'stva Rossiyskoy Federatsii ot 07.12.2020 g. № 2040* [On conducting an experiment on the implementation of a digital educational environment Decree of the Government of the Russian Federation dated 07.12.2020 No. 2040]. Available at: http://government.ru/docs/all/131381/ (accessed 25 June 2021).
6. *Ob utverzhdenii Kontseptsii profil'nogo obucheniya na starshey stupeni obshchego obrazovaniya Prilozhenie k prikazu Minobrazovaniya Rossii ot 18.07.2002 N 2783 KONTsEPTsIYa profil'nogo obucheniya na starshey stupeni obshchego obrazo-*

общего образования [Электронный ресурс]. — URL: http://docs.cntd.ru/document/901837067 (дата обращения: 25.06.2021)

7. *Прокофьев А.А.* Задачи с параметрами. — М.: МИЭТ, 2004. — 258 с.
8. *Родионов Е.М.* Решение задач с параметрами: Пособие для поступающих в вузы. — М.: МП «Русь-90», 1995.
9. *Шарыгин И.Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебное пособие для 10 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1989.
10. *Шарыгин И.Ф., Голубев В.И.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебное пособие для 11 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1991.
11. *Шестаков С.А., Юрченко Е.В.* Уравнения с параметром. — М.: Слог, 1993.
12. Элементы теории множеств: Учебно-методическое пособие/ Сост.: Т.В. Кулагина, Н.Б. Тихонова — Пенза: ПГУ, 2014. — 32 с.
13. *Ястребинецкий Г.А.* Задачи с параметрами: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1986.

vaniya [On approval of the Concept of profile education at the senior level of general education Appendix to the order of the Ministry of Education of Russia dated July 18, 2002 N 2783 CONCEPT profile training at the senior level of general education]. Available at: http://docs.cntd.ru/document/901837067 (accessed 25 June 2021).

7. Prokof'ev A.A. *Zadachi s parametrami* [Tasks with parameters]. Moscow, MIET Publ., 2004. 258 p.
8. Rodionov E.M. *Reshenie zadach s parametrami* [Solving problems with parameters]. Moscow, MP «Rus'-90» Publ., 1995.
9. Sharygin I.F. *Fakul'tativnyy kurs po matematike: Reshenie zadach* [Optional course in mathematics: Problem solving]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1989.
10. Sharygin I.F., Golubev V.I. *Fakul'tativnyy kurs po matematike: Reshenie zadach: Uchebnoe posobie dlya 11 kl. sred. shk.* [Optional course in mathematics: Problem solving: Textbook for 11 grades. wednesday shk]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1991.
11. Shestakov S.A., Yurchenko E.V. *Uravneniya s parametrom* [Equations with a parameter]. Moscow, Slog Publ., 1993.
12. *Elementy teorii mnozhestv* [Elements of set theory]. Penza, PGU Publ., 2014. 32 p.
13. Yastrebinetskiy G.A. *Zadachi s parametrami* [Tasks with parameters]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1986.